DA GIOCHI D’AUTUNNO 2006
SOLUZIONI E COMMENTI

1. **GIOCO DI CUBI**

L’altezza della piramide di Luca è **95** cm. = (14 + 13 + 12 +…+ 7 + 6 + 5)

2. **LA PARTENZA**

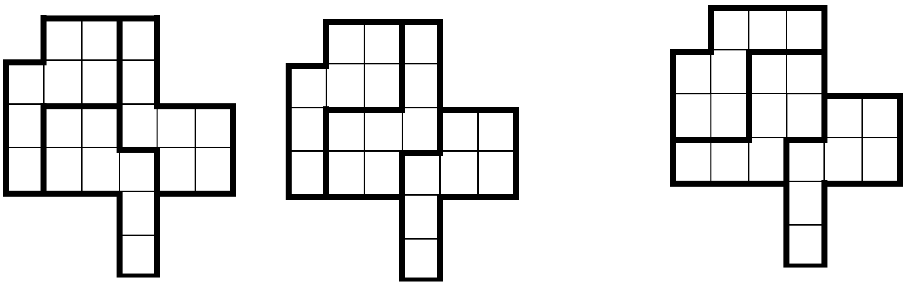
Anna saluterà le amiche nel seguente ordine:

S-I-G-C

Silvia, Ingrid, Giovanna e Claudia.

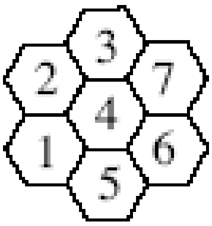
3. **DECOUPAGE**

Tre soluzioni:



4. **DA 1 A 7**

Il problema ammette una sola soluzione



5. I NASTRI

La Professoressa potrà spendere al minimo **78** €. Comprerà 8 pacchetti da 5 nastri, spendendo 60 €; 4 pacchetti da 2 nastri per 15 € e 1 pacchetto da 1 nastro per 3 €.

6. W IL NONNO !

Il nonno è nato nell’anno 1900+10d+u.
Oggi il nonno ha: 2007- (1900+10d+u) cioè 107-10d-u anni.
La somma delle cifre del suo anno di nascita è 1+9+d+u, cioè 10+d+u.
Risulta allora: 1900+10d+u+5(10+d+u)=2007.
Sviluppando: 1950+15d+6u=2007 e d=(57-6u)/15.
Dovendo essere d ed u delle “cifre” (interi non negativi minori di 10) allora (57-6u) è un multiplo di 15.
Con u=2 risulta d=3 (anno di nascita del nonno 1932; età 75 anni e 1932+5(1+9+3+2)= 1932+75 =2007.
Con u=7 risulta d=1 (anno di nascita del nonno 1917; età 90 anni e 1917+5(1+9+1+7) = 1917+90 =2007.

Il problema ammette due soluzioni:

1917 – 1932

7. VERO O FALSO ?

Il numero di frasi vere è **3.**
Possono essere vere le frasi 1-3-5 (e false le frasi 2-4-6) oppure essere vere le frasi 2-4-6 (e false le frasi 1-3-5).

8. **TUTTO AUMENTA**

Esprimiamo il vecchio prezzo con: 10d+u e il nuovo prezzo con 10u+d. Vale la relazione
10u+d = 1.20 (10d+u)

da cui si ricava:: 11d = 8,8 u e d = 4 u/5 dovendo essere d ed u delle cifre, si ricava: d=4 e u=5. Il vecchio prezzo era di 45 € e quello nuovo di **54** €.

Vogliamo proporre una riflessione sullo scambio delle cifre di un numero:

Cosa succede, in generale, se invertiamo le due cifre di un numero di due cifre?
Esempi:
21 e 12? la differenza tra il maggiore ed il minore è 9 (la differenza tra le due cifre è 1)
31 e 13? la differenza tra il maggiore ed il minore è 18 (la differenza tra le due cifre è 2)
41 e 14? la differenza tra il maggiore ed il minore è 27 (la differenza tra le due cifre è 3)
91 e 19? la differenza tra il maggiore ed il minore è 72 (la differenza tra le due cifre è 8)
52 e 25? la differenza tra il maggiore ed il minore è 27 (la differenza tra le due cifre è 3)
94 e 49? la differenza tra il maggiore ed il minore è 45 (la differenza tra le due cifre è 5)
Si può dimostrare algebricamente …

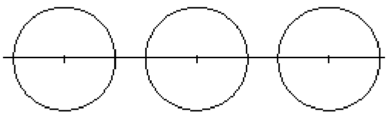
Cosa succede se, in un numero di tre cifre, invertiamo la cifra delle centinaia con quella delle unità?
Esempi:
241 e 142? la differenza tra il maggiore ed il minore è 99 (la differenza tra le due cifre è 1)
371 e 173? la differenza tra il maggiore ed il minore è 198 (la differenza tra le due cifre è 2)
431 e 134? la differenza tra il maggiore ed il minore è 297 (la differenza tra le due cifre è 3)
901 e 109? la differenza tra il maggiore ed il minore è 792 (la differenza tra le due cifre è 8)
572 e 275? la differenza tra il maggiore ed il minore è 297 (la differenza tra le due cifre è 3)
984 e 489? la differenza tra il maggiore ed il minore è 495 (la differenza tra le due cifre è 5)

Cosa succede se, in un numero di tre cifre, invertiamo la cifra delle centinaia con quella delle decine?
Esempi:
241 e 421? la differenza tra il maggiore ed il minore è 180 (la differenza tra le due cifre è 2)
371 e 731? la differenza tra il maggiore ed il minore è 360 (la differenza tra le due cifre è 4)
431 e 341? la differenza tra il maggiore ed il minore è 90 (la differenza tra le due cifre è 1)
901 e 091? la differenza tra il maggiore ed il minore è 810 (la differenza tra le due cifre è 9)
572 e 752? la differenza tra il maggiore ed il minore è 180 (la differenza tra le due cifre è 2)
914 e 194? la differenza tra il maggiore ed il minore è 720 (la differenza tra le due cifre è 8)

Cosa succede se in un numero di tre cifre la cifra delle unità diventa la cifra della decine, quella delle decina diventa cifra della centinaia e quella della centinaia diventa cifra delle unità?
Esempi:
241 e 412 comincio ad invertire centinaia e decine (241 e 421) la differenza è 180; inverto poi le unità con e nuove decine (421 e 412), la differenza è 9. La differenza tra il maggiore ed il minore è 171 (180-9=171)

9. IL COMPASSO DI JACOB

La quarta circonferenza può essere tracciata in **6** diversi modi:



Dove si deve trovare il centro della quarta circonferenza per poter essere tangente alle due circonferenze di sinistra (le due circonferenze sono interne alla nuova circonferenza)?
Sull'asse del segmento individuato dai due centri. Per provarlo, chiediamo aiuto alla geometria analitica .
Facciamo coincidere il centro della circonferenza centrale con l'origine degli assi cartesiani e supponiamo (per semplificare, con un esempio numerico) che il raggio delle tre circonferenze sia 2 e che i centri delle altre due circonferenze siano (-5;0) e (5;0). Prendiamo come primo centro della quarta circonferenza, di raggio R, il punto (-5/2;y). Affinché la circonferenza centrale e quella di sinistra siano tangenti internamente e la circonferenza di destra sia tangente esternamente, il raggio R deve essere uguale alla distanza tra il centro della quarta circonferenza e il centro di quella centrale più 2 (raggio piccolo) oppure alla distanza tra il centro della quarta circonferenza e il centro di quella a destra, meno 2 (raggio piccolo).

$R = \sqrt{((5/2)^2+y^2)} + 2$
$R = \sqrt{((5/2 +5)^2+y^2)} - 2.$
Uguagliando e sviluppando, si ottiene:

$\sqrt{((5/2 +5)^2+y^2)} = \sqrt{((5/2)^2+y^2)} + 4$
$225/4 + y^2 = 25/4 + y^2 +16 + 8 \sqrt{((5/2)^2+y^2)}$

$34 = 8\sqrt{((5/2)^2+y^2)}$
$17 = 4\sqrt{((5/2)^2+y^2)}$
$289 = 16(25/4 + y^2)$
$189 = 16y^2$
$y = \pm\sqrt{(189/16)}$.
Le due soluzioni diventano quattro se il centro della quarta circonferenza si prende sulla retta x=5/2.
Centro ($\pm 5/2$; $\pm\sqrt{(189)}/4$) R= 17/4

Il centro della quarta circonferenza può trovarsi sull'asse delle Y, nel punto (0,y); la circonferenza centrale deve risultare tangente internamente, le altre due tangenti esternamente.
Allora:
$R = |y| + 2$
$R = \sqrt{((5)^2+y^2)} - 2$
Uguagliando e sviluppando, si ottiene:
$\sqrt{((5)^2+y^2)} = |y| + 4$
$25 + y^2 = y^2 + 8|y| + 16$
$8|y| = 9$
$|y| = 9/8$
Si trovano altre due soluzioni.
Centro (0; $\pm$ 9/8) R= 25/8

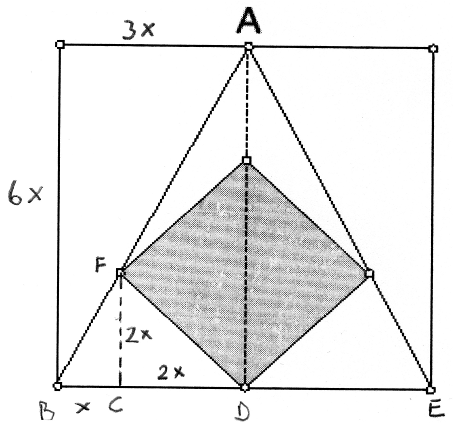
10. IL QUADRILATERO

Al minimo l'ampiezza dell'angolo maggiore deve essere 92°.
Si ha l'ampiezza minima se le misure degli angoli si avvicinano il più possibile all'ampiezza media (90°).La misura degli angoli è allora: 88°, 89°, 91° e 92°.

11. CHI È IN ANTICIPO E CHI IN RITARDO.

Ogni ora, si forma una "forbice" di 8 minuti.
Adesso la forbice è di 72 minuti. Sono passate 9 ore dal momento in cui i due orologi erano esatti.
Allora, l'orologio di Nando è avanti di 45 minuti, quello di Giorgio è indietro di 27 minuti. Sono esattamente le 16.40.
9 ore fa erano le 7.40.

12. IL QUADRATO MISTERIOSO



Dato che A è il punto medio del lato del quadrato, anche nel triangolo BCF il cateto BC è la metà del cateto CF.
Allora il triangolo CDF è rettangolo ed isoscele. Indicando con x il segmento BC, risulta:
CF=CD= 2x; BC = 3x e il lato del quadrato grande uguale a 6x.
L'area del quadrato grande è $36x^2$; quella del quadrato grigio $8x^2$ (Teorema di Pitagora).

Essendo $36x^2 = 189\ m^2$, $8x^2$ vale **42** m^2.

13. I NUMERI DI CARLA

Numeri da due cifre che soddisfano la condizione: 9.

Numeri da tre cifre:

che iniziano con la cifra 1:

i numeri da 110 a 119	10
i numeri che hanno terza cifra 1(escluso 111)	9
i numeri che hanno 2° e 3° cifra uguale (escluso 111)	9

Totale 28

Analogamente per i numeri che iniziano per 2,3,…9.

Numeri di tre cifre che soddisfano la condizione: 9x28=**252**.

Numeri da quattro cifre:

che iniziano con 11.. , da 1100 a 1199 100

che iniziano con 1 non hanno 1 alla seconda cifra

tutti i numeri da 1000 a 1019 20

altri che iniziano con 10 e finiscono con 0 8

altri che iniziano con 10 e finiscono con 1 8

altri con ultime due cifre uguali 8

Totale 44

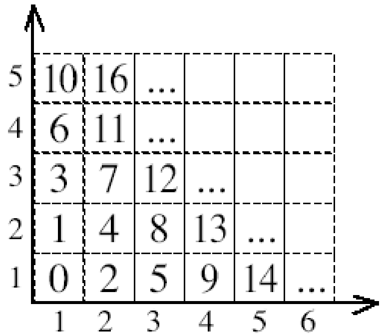
Analogamente per numeri che iniziano per 12,…19

Numeri di quattro cifre che soddisfano la condizione: 100+9x44=**496**.

Numeri da 2000 a 2007 che soddisfano la condizione: **8**

In totale i numeri di Carla sono 9+252+496+8=**765**

14. LE COORDINATE DELL’ANNO



I numeri che trovano nella colonna 1 sono numeri triangolari e il primo si trova alla riga 2.
Tutti i numeri triangolari sono del tipo:
$\Delta = n (n+1)/2$
Il numero triangolare minore di 2007 e più vicino a 2007 è il 62° che vale
62x63/2 = 1953 e che si trova alla riga 63.
Per scrivere il numero 2007, occorre scendere di 54 caselle e spostarsi a destra di altrettante caselle.
Le coordinate di 2007 sono **(55; 9)**

15. GRANDANGOLO

Il triangolo dato è rettangolo essendo $(2\sqrt{7})^2 + 6^2 = 8^2$ (infatti 28+36=64). Allora, anche il triangolo ottenuto congiungendo i punti medi dei tre lati è rettangolo e l’angolo maggiore misura 90°

16. MCD = DIFFERENZA

I quattro numeri sono 8, 9,10 e 12.

La loro somma è **39**.

-	9	10	12
8	1	2	4
9	-	1	3
10	-	-	2

17. L’ESAGONO

Al minimo, l’ampiezza dell’angolo maggiore deve essere **123**°.
Si ha l’ampiezza minima se le misure degli angoli si avvicinano il più possibile all’ampiezza media (120°). La misura degli angoli è allora: 117°, 118°, 119°, 121°, 122° e 123°.

18. QUANTI 7 !

-	7	-	-	7	-			-	7	
	-	-				-	-	-	-	-
		7	-							
		-	-	7						
				-	-					
					-					

Un modo per risolvere il problema può essere quello di procedere a ritroso:

- Supponiamo che il divisore sia 17.
  Il trattino in fondo a sinistra della riga verticale evidenziata, deve essere 0 e i due trattini sopra devono essere un multiplo di 17 minore di 100: 17 – 34 – 51 –68 – 85; i rispettivi quozienti sono: 1 - 2 - 3 - 4 - 5
  Nella terzultima riga, dobbiamo avere un numero di 3 cifre, multiplo di 17 aumentato della cifra delle decine del numero scritto nella penultima riga e che termina con la cifra 7. I multipli di 17 maggiori di 100 sono: 102, 119, 136 e 153. Nella terzultima riga si possono scrivere i numeri: 107, 127 e 137. Nel primo caso la penultima cifra del quoziente è 6, nel secondo caso è 7 (non accettabile) e nel terzo è 8.
  Nella quart'ultima riga, la terza dall'alto, si dovrà scrivere un numero compreso tra 70 e 79, tale che diviso per 17 dia per resto 10, o 13.
  Solo **78** (4x17+10) soddisfa questa condizione, allora il numero scritto nella penultima riga è **51**. Le ultime tre cifre del quoziente possono allora essere solo ..**463**.
  Nella seconda riga dall'alto si dovrà scrivere un numero di due cifre che diviso per 17 dia resto 7 (e non contenga la cifra 7). Possono essere: 24, 41, 58, (78) o 92, inoltre la cifra delle decine deve essere il resto della divisione per 17, di un altro numero di due cifre che termina per 7 (e non contenga un altro 7); possiamo avere solo **87** nella prima riga e **24** nella seconda.
  La prima soluzione è: **874871**

8	7	4	8	7	1			1	7	
	2	4-				5	1	4	6	3
		7	8							
		1	0	7						
				5	1					
					0					

- Supponiamo che il divisore sia 27.
  Il trattino in fondo a sinistra della riga verticale evidenziata, deve essere 0 e i due trattini sopra devono essere un multiplo di 27 minore di 100: 27 – 54 – 81; i rispettivi quozienti sono: 1 - 2 – 3.
  Nella terz'ultima riga dobbiamo avere un multiplo di 27 aumentato della cifra delle decine del numero scritto nella penultima riga (2, 5 o 8) e che termina con la cifra 7. I multipli di 27 maggiori di 100 sono: 108, 135, 162, 189, 216, 243. Nella terzultima riga si possono scrivere i numeri: 137, 167 e 197; nei tre diversi casi, la penultima cifra del quoziente è: 5, 6 o 7 (quest'ultima non accettabile).
  Nella quart'ultima riga, la terza dall'alto, si dovrà scrivere un numero compreso tra 70 e 79, tale che diviso per 27 dia per resto 13 o 16.
  Solo 70 soddisfa questa condizione, allora il numero scritto nella penultima riga è **54**.
  Le ultime tre cifre del quoziente possono allora essere solo …**262**.
  Nella seconda riga dall'alto si dovrà scrivere un numero di due cifre che diviso per 27 dia resto 7 (e non contenga la cifra 7). Possono essere: 34, 61, o 88, (inoltre la cifra delle decine - 3, 6 o 8 - deve essere il resto della divisione per 27, di un altro numero di due cifre che termina per 7 e non contenga un altro 7); possiamo allora avere **57** nella prima riga e 34 nella seconda oppure **87** nella prima 61 nella seconda riga.
  Altre due soluzioni sono:
  574074:27=21262
  871074:27=32262.

5	7	4	0	7	4			2	7	
	3	4-				2	1	2	6	2
		7	0							
		1	6	7						
				5	4					
					0					

8	7	1	0	7	4			2	7	
	6	1				3	2	2	6	2
		7	0							
		1	6	7						
				5	4					
					0					

Procedendo in modo analogo si scopre che non esistono altre soluzioni.